Parcial. Tercera fecha: 20 de agosto de 2020

Apellido y nombres:

Nro Padrón:

1. Calcule la integral
$$\int_C (z\sin(\frac{1}{z}) + \frac{z^2+2z}{2z^2+4z-6} + \cosh(z))dz$$
siendo C una circunferencia centrada en el origen de radio 2.

2. Sea $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k k(z-3)^{k-1}$. Determine el conjunto de los z donde f es holomorfa. Calcule
$$\int_C \frac{f(z)}{(z-3)^3}\,dz$$
siendo C el rectángulo de vértices 2-i, 5-i, 5+i y 2+i.

3. Defina una determinación de rama de la función $g(z) = log(z-2)$ sea holomorfa en un entorno de 0, y halle la serie de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ de la función $f(z) = g(z) + \frac{1}{z(z-2)}$, indicando el dominio de convergencia de la serie hallada. Estudie si la serie alternada de los coeficientes, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k c_k$, converge y en tal caso, diga a qué valor converge.

4. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar claramente.
   - (I) Si $D = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < Re(z) < \frac{1}{2}\}$, y $f(z) = e^{\pi z}$, entonces la imagen de D por f es $f(D) = \{w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < arg(w) < \frac{\pi}{2}\}$
   - (II) Si $u(x,y)$ es armónica en D, entonces $\phi(x,y) = e^{u(x,y)}$ es armónica en D.
   - (III) El punto del infinito es una singularidad no aislada de la función $f(z) = \frac{1}{cos(\pi z)}$
   - (IV) $z = 0$ es una singularidad evitable de $f(z) = z\sin(\frac{1}{z})$

Parcial 20/8/20

Resolución

(1)
- $z . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{0}^{\infty} z \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k}}$

$$\Rightarrow \int_C z \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{z}\right) dz \boxed{= 0} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(z \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{z}\right), 0\right)$$

- $\frac{z^2+2z}{2z^2+4z-6} = \frac{z(z+2)}{2(z+3)(z-1)} \Rightarrow \int_C \frac{z(z+2)}{2(z+3)(z-1)} dz = \int_C \frac{z(z+2)/(2(z+3))}{z-1} dz$

$$= \underset{\substack{\text{FIC} \\ 1 \in RI(C)}}{2\pi i} \cdot \frac{1(1+2)}{2(1+3)} = \boxed{\frac{3\pi i}{4}}$$

- $\int_C \cosh(z)\, dz = \boxed{0}$ (T. Cauchy-Goursat)

$$\Rightarrow \text{Respuesta: } \boxed{0 + \frac{3\pi i}{4} + 0 = \frac{3\pi i}{4}}$$

(se espera mejor justificación)

(2) $f(z) = \sum_{1}^{\infty} \underbrace{\left(\tfrac{2}{5}\right)^k k (z-3)^{k-1}}_{a_k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left(\frac{2}{5}\right)^{k+1} \frac{(k+1)|z-3|^k}{\left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot k\,|z-3|^{k-1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(k+1)}{k} |z-3| \xrightarrow{k\to\infty} \frac{2}{5}|z-3| = L$$

Converge abs. si $L<1$ (D'Alembert): $|z-3| < \frac{5}{2}$

Como es serie de potencias, es holomorfa en región abierta de convergencia.

(no es necesario analizar convergencia puntual en frontera, porque ~~dice~~ se pide "donde es holomorfa")

f es holomorfa en $A = \{z : |z-3| < \frac{5}{2}\}$

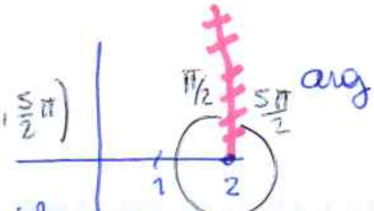
$$\int_C \frac{f(z)}{(z-3)^3} dz = \int_C \sum_{1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{5}\right)^k \cdot k (z-3)^{k-4} dz \underset{\substack{C \cup RI(C) \subset A,\ 3 \in RI(C) \\ \text{Serie C.U. en discos} \subset A}}{=} \sum_{1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{5}\right)^k \cdot k \overbrace{\int_C (z-3)^{k-4} dz}^{\substack{=0 \text{ si } k-4 \neq -1 \\ = 2\pi i \text{ si } k-4=-1}} = \boxed{\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 \cdot 3 \cdot 2\pi i}$$

③ $g(z) = \log(z-2)$ Pto ramif: $z_0 = 2$

Defino corte de rama: $\{z:\ z = 2+it,\ t\geq 0\}$

$\arg(z-2) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$

g holo en $\mathbb{C} - \{z: z=2+it,\ t\geq 0\}$



⇒ una serie de Laurent de g centrado en 0 sólo puede converger en entorno de 0, o sea en $|z|<R$, con $R=2$.

(Es decir, en otra región de tipo $r_1<|z|<r_2$ que no esté incluido en $|z|<R$, tiene ptos del corte, entonces g no admite DSL en esa región)

$$g'(z) = \frac{1}{z-2} = -\frac12 \cdot \frac{1}{1-z/2} \overset{|z|<2}{=} \left(-\frac12\right)\sum_0^\infty \left(\frac z2\right)^k = \sum_0^\infty -\frac{z^k}{2^{k+1}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_0^\infty -\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{z^{k+1}}{k+1} + c \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^\infty -\frac{1}{2^j}\cdot\frac{z^j}{j} + c$$

siendo c = g(0) = log(-2) = ln(2) + pi

$$y:\ \frac{1}{z(z-2)} = \frac1z \cdot \frac{1}{z-2} \underset{(*)}{=} \frac1z \cdot \sum_0^\infty -\frac{z^k}{2^{k+1}} = \sum_0^\infty -\frac{z^{k-1}}{2^{k+1}} \qquad |z|<2$$

$$\boxed{f(z)} = \sum_{j=1}^\infty -\frac{1}{2^j}\cdot\frac{z^j}{j} + \sum_0^\infty -\frac{z^{k-1}}{2^{k+1}} + c = -\frac12 z - \frac{1}{2^2}\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2^3}\frac{z^3}{3} - \dots + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2} + \frac{z}{2^3} + \dots + c$$

$$= \frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^3} - \frac12\right)z + \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^2\cdot 2}\right)z^2 + \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{3\cdot 2^3}\right)z^3 + \dots + c$$

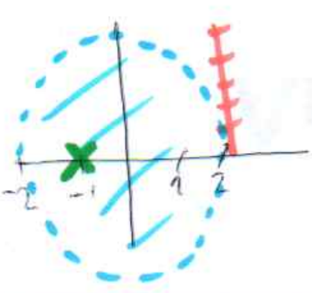
$$= \frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2} + c + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2^{k+2}} - \frac{1}{2^k\cdot k}\right) z^k$$

Dom. conv: $|z|<2$

Serie $\sum (-1)^k c_k$ → evaluar serie en $z=(-1)$.

¿Converge en $z=-1$? → Sí. porque $-1 \in$ región convergencia. Converge a $f(-1) = \log(-1-2) + \frac{1}{(-1)(-1-2)}$

$$f(-1) = \boxed{\ln 3 + i\pi + \frac13}$$



(4)

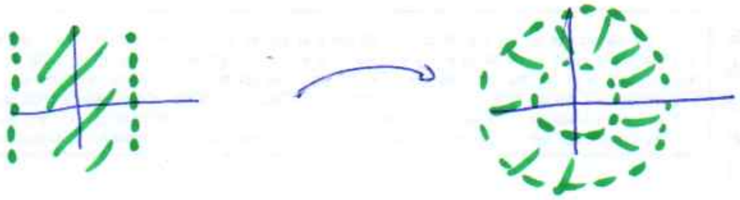
(I) $-\frac{1}{2} < \text{Re}\, z < \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \text{Re}(\pi z) < \frac{\pi}{2}$

$e^{-\pi/2} < e^{\text{Re}(\pi z)} < e^{\pi/2}$

$f(z) = e^{\pi z} = e^{\text{Re}(\pi z)} \cdot e^{i\,\text{Im}(\pi z)}$

$|f(z)| = e^{\text{Re}(\pi z)} \in (e^{-\pi/2}, e^{\pi/2})$



$\boxed{\text{FALSO}}$

(II) $\boxed{\text{FALSO}}$.

Contraejemplo: $u(x,y) = x$ es armónica.

$\phi(x,y) = e^{x}$ no lo es, ya que

$\phi''_{xx} + \phi''_{yy} = e^{x} \neq 0$

(III) $f(z) = \frac{1}{\cos(\pi z)}$ → sing: $z : \cos(\pi z) = 0 \to \pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Sing: $z = \frac{1}{2} + k, \ k \in \mathbb{Z}$

En todo entorno del infinito, $|z| > R$, existen infinitas singularidades de f. $\Rightarrow z = \infty$ es sing no aislada.

$\boxed{\text{VERDADERO}}$

(IV) $f(z) = z \,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2k}}$ (ver ej. 1)

$\Rightarrow z = 0$ es sing. esencial

$\boxed{\text{FALSO}}$